**بناء مثلث بواسطة فرجار وحافة مسطرة فقط اذا عُلمت متوسطاته الثلاثة**

**جدول 1: رسم أحد رؤوس المثلث ورسم نقطة التقاء متوسطاته بواسطة فرجار وحافة مسطرة، مستخدمين الجيوجبرا.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **الخطوة** | **الخيار** | **العملية** |
| رسم أحد رؤوس المثلث (الرأس (A | | |
| 1 |  | نختار القائمة "نقاط". |
| 2 |  | نختار الأمر "نقطة جديدة".  نرسم بواسطتها النقطة A (أحد رؤوس المثلث). |
| رسم نقطة التقاء المتوسطات: النقطةT .  لاحظوا أن T هي نقطة تقع على محيط الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها يساوي ثلثي ta. | | |
| 3 |  | نختار القائمة "دوائر". |
| 4 |  | نختار الأمر "فرجار". |
| 5 |  | نرسم دائرة مركزها A و نصف قطرها ثلثا ta (المتوسط الخارج من الراس A)، وذلك بالنقر على الطرف الأيسر للقطعة ta وعلى النقطة التي تبعد بمقدار ثلثي ta عن الطرف الأيسر، ثم ننقر على النقطة A. |
| 6 |  | نختار القائمة "نقاط". |
| 7 |  | نختار الأمر "نقطة جديدة". |
| 8 |  | نرسم النقطة T، يمكن أن تكون أي نقطة من النقاط الواقعة على محيط الدائرة. |
| إنشاء قطعة مستقيمة AT (طولها يساوي ثلثي المتوسط الخارج من النقطة A إلى الضلع BC): | | |
| 10 |  | نختار القائمة "مستقيمات". |
| 11 |  | نختار الأمر "قطعة مستقيمة محددة بنقطتين". |
| 12 |  | ننقر على مركز الدائرة A ثم على النقطة T. |

في هذه المرحلة لا يمكننا إنشاء عناصر أخرى (رؤوس أو نقاط وسط) بحيث نكون متأكدين من صحة هذا الإنشاء في المثلث، لذلك نبدأ بعملية استكشاف بواسطة الجيوجبرا. خطوة ضرورية في هذه المرحلة هي إنشاء ضلع متحرك للمثلث يمر من النقطة A . جدول 2 يري خطوات القيام بذلك، بالإضافة إلى خطوات تحديد رأس ثان للمثلث موجود على ضلعه وتحديد منتصف الضلع.

جدول 2: إنشاء ضلع متحرك لمثلث معروف أحد رؤوسه ونقطة التقاء متوسطاته وتحديد رأسه الثاني ومنتصف الضلع

| **الخطوة** | **الخيار** | **العملية** |
| --- | --- | --- |
| إنشاء "ضلع متحركة" للمثلث يمر من النقطة A (أحد رؤوس المثلث) ومن نقطة حرة E. | | |
| 1 |  | نختار القائمة "نقاط". |
| 2 |  | نختار الأمر "نقطة جديدة". |
| 3 |  | ننقر على أي مكان في لوحة الرسم وذلك لرسم النقطة E. |
| 4 |  | نختار القائمة "مستقيمات". |
| 5 |  | نختار الأمر "قطعة مستقيمة محددة بنقطتين". |
| 6 |  | ننقر على النقطة A وثم على النقطة الجديدة E، فنكون قد أنشأنا الضلع المتحرك للمثلث المُراد بناؤه.  يمكن تغيير مكان هذا الضلع بواسطة النقر على الأيقونة  وجر النقطة E. |
| رسم الرأس الثاني للمثلث (النقطة B):  لاحظوا أن رأس المثلث B ونقطة الوسط الملائمة C1 يجب أن يقعا على الخط المستقيم المُنشأ أعلاه، ونحن نعلم كم يبعد كل منهما عن نقطة إلتقاء المتوسطات T. | | |
| 7 |  | نختار القائمة "دوائر". |
| 8 |  | نختار الأمر "فرجار". |
| 9 |  | نرسم دائرة بحيث يكون نصف قطرها مساويا لثلثي tb، وذلك بواسطة النقر على أيقونة الفرجار ثم على الطرف الأيسر للقطعة tb والنقطة التي تبعد بمقدار ثلثي tb عن الطرف الأيسر، ثمننقر على النقطة T (تكون قيمة نصف قطر الدائرة ثلثي المتوسط tb ، ومركز الدائرة النقطة T). |
| 10 |  | نختار القائمة "نقاط". |
| 11 |  | نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين". |
| 12 |  | ننقر على نقطة تقاطع المستقيم AE وهذه الدائرة، وهكذا نكون قد حددنا الرأس الثاني (B) للمثلث. |
| رسم أحد أضلاع المثلث: AB | | |
| 13 |  | نختار القائمة "مستقيمات". |
| 14 |  | نختار الأمر "قطعة مستقيمة محددة بنقطتين". |
| 15 |  | نرسم قطعة مستقيمة من النقطة A حتى النقطة B، تشكل هذه القطعة ضلعا من أضلاع المثلث. |
| رسم منتصف الضلع AB: النقطة C1 | | |
| 16 |  | نختار القائمة "دوائر". |
| 17 |  | نختار الأمر "فرجار". |
| 18 |  | نرسم دائرة بحيث يكون نصف قطرها مساويا لثلث tc، وذلك باستعمال نقاط موجودة على tc ونقطة المركز T (كما فعلنا في مراحل سابقة، مثلا الخطوة 9 في هذا الجدول). |
| 19 |  | نختار القائمة "نقاط". |
| 20 |  | نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين". |
| 21 |  | ننقر على المستقيم AE ثم على الدائرة فتظهر النقطة C1 كنقطة تقاطع هذه الدائرة والمستقيم AE. |
| رسم القطع AC1,C1B. | | |
| 22 |  | نختار القائمة "مستقيمات". |
| 23 |  | نختار الأمر "قطعة مستقيمة محددة بنقطتين". |
| 24 |  | ننقر على النقطة A ثم على النقطة C1 لإنشاء القطعة AC1.  وننقر على النقطة C1 ثم على النقطة B لإنشاء القطعة C1B. |
| 25 |  | نخفي الدوائر في الرسم لنسهل العمل، وذلك عن طريق النقر بزر الفأرة الأيمن على محيط الدائرة ثم اختيار الأمر "أظهر الكائن". |

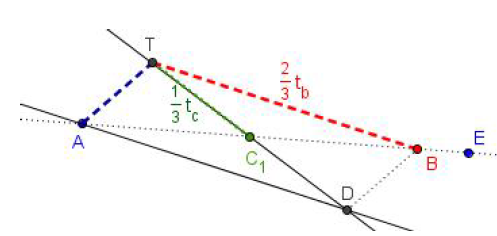
نحن ما زلنا نستكشف، هذا ليس بالضرورة البناء المطلوب وإن كان يبدو صحيحا. السؤال هو: كيف يمكننا أن نحرّك موضع النقطة E بحيث يصبح البناء صحيحا؟ لكي نفعل ذلك مهم أن نتذكر أنه أنأ

حسب تعريف المتوسط يجب أن تكون النقطةC1 منتصف الضلع AB. وهذا قد لا يتحقق في الوضع الحالي للنقطة E، حيث يمكن أن نرى من الحقل الجبري أنAC1 قد لا يساوي C1B. لذا علينا أن نحرك النقطة E بحيث تتساوى القطعتان المذكورتان.

مهم هنا أن يتناقش الطلاب في الشرط الذي إن تحقق يمكن بناء المثلث. النقاش سوف يظهر لهم أننا إذا قمنا بتحديد مكان أحدى النقطتين:B أو C1 فإنه يمكننا بناء المثلث المطلوب. هذا صحيح لأننا إذا قمنا بتحديد مكان النقطة C1 مثلا، سيكون بإمكاننا أن ننشئ قطعة مساوية للقطعة AC1 على امتداد هذه القطعة مما يجعلنا نحدد مكان الرأس B**. كذلك** نستطيع تحديد مكان الرأس C عن طريق إنشاء قطعة مساوية لضعف القطعة TC1 وعلى استقامتها.

من ناحية أخرى، إذا قمنا بتحديد مكان النقطة B فإنه يمكننا أن نجد نقطة الوسط C1. مما سبق تنبع أهمية السؤال: كيف يمكننا تحديد مكان النقطة C1 أو B مباشرة؟

حين يناقش المعلم قضية تحديد إحدى النقطتين المذكورتين مفضل أن يفعل ذلك بطرح أسئلة موجهة للطلاب. سؤال مهم هو: هل بإمكاننا تعيين نقطة D بحيث تكون النقطة C1 منتصف قطري متوازي الأضلاع ADBT؟ الشكل 1 يوضح الفكرة للطلاب.



شكل 1: D كرأس من رؤوس متوازي أضلاع

إحدى إمكانيات الإجابة على السؤال مبينة في جدول 3.

جدول 3: تعيين نقطة D بحيث تكون النقطة C1 منتصف قطري متوازي الأضلاع ADBT

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **الخطوة** | **الخيار** | **العملية** |
| 1 |  | نختار القائمة "مستقيمات ذات صفة خاصة". |
| 2 |  | نختار الأمر "مستقيم مواز"، ونرسم خطا موازيا للضلع TB عبر النقطة A. |
| 3 |  | نختار القائمة "مستقيمات". |
| 4 |  | نختار الأمر "مستقيم بين نقطتين"، ونمد خطا يمر في T و C1. |
| 5 |  | نختار القائمة "نقاط". |
| 6 |  | نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين".  ننقر على المستقيم الموازي وعلى المستقيم TC1، فنحصل على النقطة D. |

ولكن ما فعلناه لم يكن باستخدام الفرجار وحافة المسطرة فقط، ولذلك علينا أن نستفيد من استكشافنا السابق لنرسم النقطة D باستخدام الأداتين السابقتين فقط. هذا هو إذا موضوع نقاشنا التالي مع الطلاب، ونريد أن نتوصل معهم أن بإمكاننا أن نرسم النقطة D كنقطة تقاطع دائرة مركزها النقطة A ونصف قطرها يساوي ثلثي tb ودائرة مركزها النقطة T ونصف قطرها هو ضعف القطعة TC1 ، أي أن نصف قطرها هو ثلثا tc. من ناحية أخرى، C1 هي منتصف القطعة TD، لذا بإمكاننا أن نرسم النقطة C1 بطريقة شبيهة لرسمنا النقاط التي تقسم قطعة إلى أثلاث، كما فعلنا أعلاه. رسم C1 يكفينا لبناء المثلث.

نعود لبنائنا السابق بواسطة جيوجبرا، حيث حصلنا على النقطتين A وT. الآن نريد أن ننشئ النقطة D، ثم النقطة C1 لكي نحصل على بناء كما في شكل 2.



شكل 2: رسم D و C1 بجيوجبرا محاكين العمل بفرجار وحافة مسطرة

بعد تحديد مكان النقطة C1 نستطيع بسهولة، كما ذكرنا سابقا، إكمال عملية بناء المثلث.

نتائج البناء السابق باستخدام جيوجبرا:

أحد الأمور الرائعة في جيوجبرا هو أنها ديناميكية، ما يجعلنا قادرين على اختبار البناء في العديد من الحالات. في هذه الحالة ولأن البناء واحد يمكننا أن نختبر بعض القضايا الرياضية المهمة، مثلا:

* هل المثلث ثابت؟

باستخدام جيوجبرا يمكننا أن نرى أن المثلث وبناءنا كله يتغيران مع تغيير المعطيات. هذا يعني أننا إن قمنا بتغيير أطوال ta, tb, tc يتغير المثلث تلقائيا.

* ما هي الشروط التي يجب أن تتحقق من أجل أن يتكون مثلث؟

هل يختفي المثلث ومتى؟

إذا قمنا بمد أحد المتوسطات بحيث يكون طوله أكبر من مجموع الآخرين سيختفي المثلث! هذا يعني أن هناك شروطا لوجود المثلث. يمكننا أن نتناقش مع الطلاب عن سبب الاختفاء. نقارن ما حصلنا عليه مع الشروط التي يجب أن تحققها أضلاع المثلث حتى يتكون المثلث (مجموع كل ضلعين أكبر من الضلع الثالث). وعلى الطلاب أن يستنتجوا أن مجموع كل متوسطين يجب أن يكون أكبر من طول المتوسط الثالث.

هذا المثال يري كيف يمكن للطلاب أن يقوموا باستكشاف ديناميكي ليوسعوا فهمهم بشكل كبير وواضح لعمليات البناء بواسطة الفرجار وحافة المسطرة. قيام الطلاب ببناءات كهذه ينمي قدرتهم على التحليل ونقاش نتائج عملهم.

**مساحة الأشكال المُنشأة على أضلاع مثلث ما:**

سنبحث بواسطة جيوجبرا علاقة هندسية مختلفة عن العلاقات التي بحثناها سابقا، وهي العلاقة بين مساحة الأشكال المُنشأة على أضلاع مثلث ما. بداية سنبحث الحالة التي يكون فيها الشكل المنشأ على أضلاع المثلث مربعا. جدول 4 يبين خطوات رسم هذه الحالة.

جدول 4: رسم مثلث عام وإنشاء مربعات على أضلاعه

| **الخطوة** | **الخيار** | **العملية** |
| --- | --- | --- |
| إنشاء شريط تمرير من نوع زاوية (الشريط α)، للتحكم في نوع المثلث الناتج | | |
| 1 |  | نختار القائمة "أزرار". |
| 2 |  | نختار الأمر "زر المتغيرات". |
| 3 |  | ننقر على مكان مناسب في لوح الرسم لإنشاء هذا الشريط، ثم نحدد نوعه كزاوية ثم قيمته القصوى ب 180 درجة ثم ننقر على تطبيق. |
| إنشاء زاوية مرتبطة بالشريط المُنشأ أعلاه: | | |
| 4 |  | نختار القائمة "زوايا". |
| 5 |  | نختار الأمر "زاوية ذات قياس معلوم". |
| 6 |  | ننقر على مكانين مختلفين في لوح الرسم، فتظهر نافذة نحدد فيها أن هذه الزاوية متعلقة بشريط التمرير α. |
| 7 |  | بعد القيام بهذه الخطوات سيظهر لنا 3 نقاط سنبني المثلث بالاعتماد عليهن. |
|  |  | نختار القائمة "مستقيمات". |
|  |  | نختار الأمر "شعاع مار من نقطتين". |
|  |  | نرسم ضلعي الزاوية، الأول يكون بالنقر على النقطة B فالنقطة A، أما الثاني فيكون بالنقر على النقطة B فالنقطة ' A. |
| إنشاء مثلث متعلق بالزاوية المُنشأة: | | |
| 8 |  | نختار القائمة "نقاط". |
| 9 |  | نختار الأمر "نقطة جديدة". |
| 10 |  | نرسم نقطتين على ضلعي الزاوية المنشأة بحيث تكون النقطة الأولى على الضلع الأول والنقطة الثانية على الضلع الثاني. في الرسم على اليمين هاتان النقطتان هما: C و D. |
| 11 |  | نختار القائمة "مضلعات". |
| 12 |  | نختار الأمر "مضلع". |
| 13 |  | ننقر على نقطة رأس الزاوية B ثم على النقطتين اللتين رسمناهما أعلاه: D و C، ثم ننقر ثانية على النقطة B. |
| 14 |  | نقوم بإخفاء النقطة A والنقطة 'A.  والشعاعين، وذلك بالنقر بزر الفأرة الأيمن على كل واحد من هذه الكائنات واختيار الأمر “إظهار الكائن”. |
|  |  | بعد القيام بالبند السابق نحصل على الشكل الذي يظهر في الرسم. |
| اظهار قيم زوايا المثلث: | | |
| 15 |  | نختار القائمة "زوايا". |
| 16 |  | نختار الأمر "زاوية". |
| 17 |  | نظهر قيمة الزاوية C وذلك بالنقر على النقطة B، النقطة C، ثم النقطة D بالتوالي.  نظهر قيمة الزاوية D وذلك بالنقر على النقطة C، النقطة D، ثم النقطة B بالتوالي. |
| إنشاء مربع على كل ضلع من أضلاع المثلث: | | |
| 18 |  | نختار القائمة "مضلعات". |
| 19 |  | نختار الأمر "مضلع منتظم". |
| 20 |  | لإنشاء مربع على الضلع BD ننقر على النقطة B ثم على النقطة D .  نكرر هذه العملية للضلعين الآخرين مع الاهتمام بأن يكون ترتيب النقاط باتجاه عقرب الساعة وذلك للحفاظ على جمالية الرسم المُنشأ. |
| 21 |  | نظهر مساحة المربعات المُنشأة بجانب الشكل في لوح الرسم.  ننقر بزر الفأرة الأيمن على كل من المربعات ونختار الأمر “مزايا الشكل”. |
| 22 |  | نختار القائمة “إظهار العلامة” ثم نختار الأمر “قيمة”، وننقر على الأمر “إغلاق”. |
| 23 |  | نقوم بهذه العملية لكل من المربعات الثلاثة. |